s−d 相互作用における発散について
—三輪氏への反論—

近藤　　淳（電　試）

（9月20日 受理）

s−d 相互作用の問題は最近再びクローズアップされ、多くの人々がこの問題を考えるようになつた。その大部分は対数の発散をどうやつて除くかについて議論しているが、筆者は高次の項にそれ以外の発散項があることを指摘した。[1] これに関して芳田・興地両氏及び三輪氏はそのような発散項が存在することに疑問を持たれている。s−d 相互作用の厳密解が得られていない現在ではいずれが正しいと断定する事は勿論出来ないが、ここでは両氏の論拠が不確かなものであるということを指摘したいと思う。

問題の項は

$$\Sigma_{k_1}\Sigma_{k_2}\frac{f(\epsilon k_1)\{1-f(\epsilon k_2)\}}{(\epsilon k_1-\epsilon k_2)^2} \tag{1}$$

と表わされる。ϵ_k は波数 k の伝導電子のエネルギー，$f(\epsilon)$はフエルミ分布函数。この和を積分でおきかえると $\epsilon k_1 = \epsilon k_2$ のところで発散する。芳田・興地氏は[2] 分母を $(\epsilon k_1-\epsilon k_2+is)^2$ でおきかえ、この発散が起らないようにしておいてこの積分を計算し、後に $s\to 0$ とすれば、発散の困難はさけられるとしている。しかしそのような操作に何の正当性も与えておられない。もともと $1/(\epsilon k_1-\epsilon k_2)^2$ は k_1 という波動函数に k_2 という波動函数のまざる割合を表わしており、それは係数の絶対値の二乗（ただの二乗でなく）で与えられるべきものであるから、分母は $(\epsilon k_1-\epsilon k_2)^2+s^2$ でおきかえるべきであり、そうすれば上の積分は s^{-1} に比例し、$s\to 0$ で発散する。

これに対し三輪氏は、[3] J（s−d 交換積分）の同じ次数を正直に計算するともう一つ別の項があつてそれが丁度(1)を打消すと主張される。これについて項目別に検討してみたい。まず伝導電子の散乱の確率について。三輪氏によるとそれは次のようなものに比例する。

$$\Sigma_{k'}\,\Sigma_{k_2}\,\Sigma_{k_2}\{1-f(\varepsilon')\}\,f(\varepsilon_1)\,\{1-f(\varepsilon_2)\}$$
$$\times\left\{\frac{\delta(\varepsilon-\varepsilon'+\varepsilon_1-\varepsilon_2)}{(\varepsilon_2-\varepsilon_1)^2}-\frac{\delta(\varepsilon-\varepsilon')}{(\varepsilon_2-\varepsilon_1)(\varepsilon_2-\varepsilon_1+\varepsilon'-\varepsilon)}\right\} \tag{2}$$

この第二項が三輪氏の見出されたものであつて、そこにある δ 函数のために分母で $\varepsilon=\varepsilon'$ とおくことが出来、そのため分母が $(\varepsilon_2-\varepsilon_1)^2$ となり、第一項の $1/(\varepsilon_2-\varepsilon_1)^2$ と打消して $\varepsilon_1=\varepsilon_2$ における発散はもともと起つていないと主張される。しかしこの議論は大きな誤りをおかしている。上の和を積分で書き（δ 函数は積分記号の下にあるべきもの）、δ 函数の定義を用いれば

$$\lim_{S\to 0}\iiint\cdots\left\{\frac{1}{(\varepsilon_2-\varepsilon_1)^2}\cdot\frac{S/\pi}{(\varepsilon-\varepsilon'+\varepsilon_1-\varepsilon_2)^2+S^2}\right.$$
$$\left.-\frac{1}{(\varepsilon_2-\varepsilon_1)(\varepsilon_2-\varepsilon_1+\varepsilon'-\varepsilon)}\cdot\frac{S/\pi}{(\varepsilon-\varepsilon')^2+S^2}\right\}d\varepsilon'\,d\varepsilon_1\,d\varepsilon_2 \tag{3}$$

となるが、ここでは第二項で $\varepsilon=\varepsilon'$ とおくことは許されない。また第一項の $\varepsilon_1=\varepsilon_2$ における発散はいぜんとして残つている。

このようにsingularity の取扱いには十分注意をしなければならない。物理の問題としてsingularity を考えるときにはまずそれが起らないような手続きをしておて、すべての量を計算し、次に上の手続きにおいて導入したものを0に近づけ、そこで発散が残つているかどうかをみなければならない。これに対して三輪氏は、そのような手続きを導入しなくても、もともとsingularity は打消してしまうのだからそのようなことをしなくてもよいと主張されるが、その論拠に大きな誤りを含んでいることは上にみた通りである。

singularity の取扱いに注意を要することは帯磁率の場合を考えると一層はつきりする。この場合にも三輪氏は二つの項を見出されており、(1)の代りに

$$\Sigma_{k_1}\Sigma_{k_2}\frac{1}{(e^{\beta\varepsilon_1}+1)(e^{\beta\varepsilon_2}+1)}\left\{\frac{e^{\beta\varepsilon_1}}{(\varepsilon_2-\varepsilon_1)^2}-\frac{e^{\beta\varepsilon_2}-e^{\beta\varepsilon_1}}{\beta(\varepsilon_2-\varepsilon_1)^3}\right\}$$
$$(\beta=1/KT) \tag{4}$$

を考えるべき事を示された。第二項において $\varepsilon_1\sim\varepsilon_2$ のところでは分子から $\beta(\varepsilon_1-\varepsilon_2)$ が生じ、従つて第一項を打消すと主張される。しかし $\varepsilon_1\sim\varepsilon_2$ は摂動展開が破れるところであり、そこで摂動展開の式(4)を用いて、両者が打消す

と主張されてもあいまいさが残る。そこで(4)の $\varepsilon_1=\varepsilon_2$ における singularity についてもうすこしくわしく考察してみようまず

$$\int_{-a}^{a}\frac{dx}{x^2}-\int_{-a}^{a}\frac{dy}{y^2}\qquad(a>0)$$

という量を考えよう。純粋に数学の問題としてはこれは不定である。なぜならもしこれを

$$\lim_{s\to0}\left(\int_{-a}^{-s}+\int_{s}^{a}\right)-\lim_{s'\to0}\left(\int_{-a}^{-s'}+\int_{s'}^{a}\right)$$

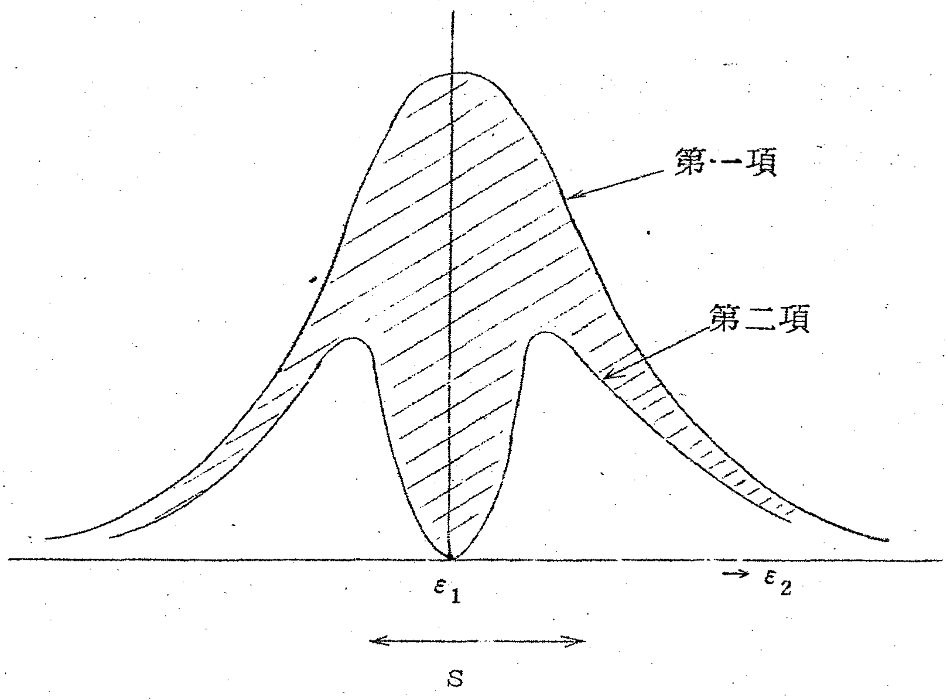
としたときに s と s' の lim のとり方が無関係なら $\infty-\infty$ となるからである。ただ $s=s'$ として lim をとつたときにのみ 0 となる。これを物理の問題としてみたときには、そのような不定さはないはずである。すなわち その問題によつて s と s' との間にはある関係があるはずで、それが $s=s'$ という関係であることがいえて始めて発散が打消しているといえる。しかし三輪氏はこの点について何の考察もはらつておられらい。

そこで今ここで簡単ながらこの点を考えてみよう。まず今のべた不定性を除くために先程のべた singularity を起らなくする手続きをとらねばならない。そのために摂動が $t=-\infty$ からゆつくり e^{st} に比例して switch on されたと考えよう。そうすれば $\varepsilon_1=\varepsilon_2$ においても分母はともかく 0 にはならないであろう。（すでにのべたように(4)の第一項では分母は s^2 になるであろう） ところが第二項において分子は $\varepsilon_1=\varepsilon_2$ で exact に 0 になる。従つて第一図に示したような有様になつていると考えられる。そうすれば第一項と第二項の差は斜線をほどこした面積に比例し、これはやはり s^{-1} という形で発散する。

なお(4)の和を積分に直さないでそのままにしておけば、という主張もあるかもしれないが、その場合には $\varepsilon_1=\varepsilon_2$ で $1/0-1/0$ という不定形になる。ここでは縮退系の摂動論を使わなければならないが、それが第一項をどのような値にするか、第二項をどのような値にするかをしらべ、両者が等しいということが示せて始めて両者が cancel するということが出来る。

はじめにのべたように、$s-d$ 相互作用の厳密解がえられていない以上、三輪氏の結論が絶対にあやまりであるとはいえないが、今のところ三輪氏は私の

近藤　淳



第　一　図

見出したものと同じ order の別のものを見出されただけであつて、両者が完全に打消すということは示しておられない。それでは私はどうか。ここで私の立場を説明しておきたい。たしかに私の議論は非常に粗いものであつて、多くのなすべきことを残している。しかし私は s－d 相互作用の問題は複雑，深遠であつて今すぐ rigorous な（と思われる）計算をしても意味がないし、また出来もしないと考え、一方では物理的にもつともと思える考察に頼り、一方では実験事実をたよりにして、ありそうに思われる効果をひろい出しておけば、それは将来より厳密な理論が出来たときにも必ず残るものと考え、そのような方向に努力している次第です。

文　　献

1) J. Kondo, Progr. Theor. Phys. 34 (1965), No.4 .
2) K. Yosida & A. Okiji, Progr. Theor. Phys. 34 (1965) .
3) H. Miwa, preprint.